

Universelle Turingmaschinen

1 Definition

Eine universelle Turingmaschine UTM ist eine Turingmaschine, welche eine beliebige andere Turingmaschine TM simulieren kann, d.h. die Maschine UTM kann in einem gewissen Sinne die Arbeit jeder beliebigen Turingmaschine übernehmen.

2 Bedeutung

- Alle Turing-berechenbaren Problem lassen sich damit lösen.
- Bestätigung der Kirchen-These.

Jede im intuitiven Sinn berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

- Starkes Indiz für die Existenz universeller Computer, eine der Grundlagen der modernen Computertechnologie.

The existence of universal computers is one of the cornerstones on which the power of modern computers and computing is based.

3 Beschreibung

3.1 Generierung

Dies ist nur ein Beispiel für eine Universelle Turingmaschine, es gibt mehrere Methoden sie zu generieren, die jedoch alle die gleiche Berechnungsfähigkeit haben.

Es sei eine Turingmaschine TM definiert durch:

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$
- $Z = \{a_0, a_2, a_3, e, a_8\}$
- $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$
- $\delta : Z \times \Gamma \longrightarrow Z \times \Gamma \times \{L, N, R\}$
- z_0
- \square
- $E = \{a_0, e, a_8\}$

Die Mengen Z, Σ, Γ, E und $\{L, N, R\}$ sind endlich und somit können die einzelnen Elemente durchnummeriert werden. Bei den Zuständen wird also a_0 zu z_1 , e zu z_2 , a_2 zu z_3 , bei den Lesekopfbewegungen L zu m_1 , N zu m_2 , R zu m_3 usw. Wir können jetzt also alle Zustände (z_1, z_2, \dots) Eingaben (x_1, x_2, \dots) und L/S-kopfbewegungen (m_1, m_2, m_3) durch Zahlen ausdrücken.

Die TM soll von einer Universellen Turingmaschine UTM simuliert werden. Dazu wird z_1 als einziger Endzustand definiert für die anderen Endzustände werden spontane Zustandsübergänge nach z_1 eingeführt. Außerdem werden die Zustandsübergänge $\delta(z_i, x_j) = (z_k, x_l, m_m)$ in fünfer-Tupel $i * j * k * l * m$ kodiert. Es ist hierbei völlig unwichtig wie diese Kodierung aussieht, ein Beispiel wäre: $0^i 10^j 10^k 10^l 10^m$. Die Überföhrungsfunktionen werden dann wiederum in eine Zahl kodiert: $\delta_0 \dagger \delta_1 \dagger \dots \delta_n \ddagger$. Auf diese Art haben wir eine TM komplett in die UTM aufgenommen.

Wir benötigen jetzt nur noch eine vollständige Aufzählung aller TM, deren Existenz wir ja schon bewiesen haben. Nun können wir einfach alle Turingmaschinen nacheinander in die UTM aufnehmen, jeweils durch ein \ddagger getrennt. Wir wissen dann jeweils an welcher Stelle die gesuchte TM in der UTM steht. Für die Kodierung muß Γ um die drei Trennzeichen $(*, \dagger, \ddagger)$ erweitert werden.

Es ist also möglich eine komplette UTM in nur eine Zahl zu kodieren.

3.2 Arbeitsweise der UTM

Nun wird anhand einer Dreiband-UTM gezeigt, wie eine UTM eine beliebige Turingmaschine simuliert. Auch dies ist nur ein Beispiel, man könnte natürlich auch eine Einband-UTM benutzen (da ja alle Mehrband-TM als einband TM dargestellt werden können), diese wäre aber um einiges komplizierter.

Zuerst erhält die UTM die Nummer der zu simulierenden TM. Diese TM (also ihre Überföhrungsfunktionen) wird dann auf das dritte Band der UTM kopiert. Dann werden Eingaben der zu simulierenden TM also der Inhalt ihres Eingabebandes auf das erste Band der UTM kopiert. Im zweiten Band wird der momentane Zustand der UTM festgehalten, dieser wird mit 0 initialisiert.

Jetzt kann die UTM anfangen die Eingaben abzuarbeiten. Dazu wird jeweils der Zustand von Band zwei und die Eingabe auf Band eins (an der aktuellen Position des Lesekopfes) gelesen, und dann in Band drei die passende Überföhrungsfunktion gesucht. Auf diese Weise arbeitet die UTM bis der Endzustand z_1 erreicht ist.

4 Zusammenfassung

Eine Universelle Turingmaschine kann also wie ein Copmputer programmiert werden, d.h. mit der Beschreibung eines Algorithmus versehen werden und somit beliebige Algorithmen berechnen. Ein Computer ist in diesem abstrakten Sinne nichts anderes als eine universelle Turingmaschine. Abschließend sollte noch erwähnt werden, daß vor kurzem die erste UTM auf DNA Basis realisiert worden ist.